Über einige zahlentheoretische Functionen.

Von **Leopold Gegenbauer.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. December 1883.)

In den folgenden Zeilen werde ich eine Reihe von Relationen zwischen zahlentheoretischen Functionen mittheilen, von denen bisher nur specielle Fälle veröffentlicht wurden.

Ist:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdot \quad \cdot p_q^{\nu_q}$$

wo die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_q$ die verschiedenen in n enthaltenen Primzahlen vorstellen, so sei:

$$\varphi_k(n) = n^k \left(1 - \frac{1}{p_1^k}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^k}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_q^k}\right)$$

also

$\varphi_1(n) = \varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als n und zu n relativ prim sind,

$\lambda(n) = (-1)^{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_q}$

$\bar{\omega}(n)$ die Anzahl der verschiedenen in n enthaltenen Primzahlen,

$\omega(n) = 2^{\bar{\omega}(n)}$ die Anzahl der Zerlegungen von n in ein Product von zwei Zahlen, welche zu einander relativ prim sind,

$\mu(n) = 0$, wenn n durch ein Quadrat theilbar ist, in den anderen Fällen aber:

$\mu(n) = (-1)^{\bar{\omega}(n)}$, $\mu(1) = 1$

$\sigma(n) = \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_q$

$f_\beta(n)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung:

$$n_1 n_2 \cdot \quad . n_\beta = n$$

also

$f_1(n) = 1$

$f_2(n) = \psi(n)$ die Anzahl der Divisoren von n

$\rho_{k,\tau}(n)$ die Summe der k-ten Potenzen jener Divisoren von n, deren complementärer Divisor eine τ-te Potenz ist,

also

$\rho_{0,\tau}(n)$ die Anzahl jener Divisoren von n, deren complementärer Divisor eine τ-te Potenz ist,

$\rho_{k,1}(n) = \psi_k(n)$ die Summe der k-ten Potenzen der Divisoren von n

$\rho_{0,1}(n) = \psi(n)$

$\pi(n)$ das Product der verschiedenen, in n enthaltenen, mit dem negativen Vorzeichen versehenen Primzahlen,

$[\alpha]$ die grösste ganze Zahl, welche in α enthalten ist,

$\varepsilon(\alpha) = 1$, wenn $\alpha \geqq 1$ ist,

$\varepsilon(\alpha) = 0$, wenn $\alpha < 1$ ist,

$P_{k,\tau}(n) = \rho_{-k,\tau}(n)\, n^k$ die Summe der k-ten Potenzen jener Divisoren von n, welche τ-te Potenzen sind,

$P_{0,\tau}(n)$ die Anzahl jener Divisoren von n, welche τ-te Potenzen sind,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s > 1).$$

Da bekanntlich:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

ist, wo das Product über alle Primzahlen p zu erstrecken ist, so hat man:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s-k)} = \prod_p \frac{1-\frac{1}{p^{s-k}}}{1-\frac{1}{p^s}}$$

$$= \prod_p \left\{1+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1-p^k}{p^{\nu s}}\right\}$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots} \frac{(1-p_1^k)(1-p_2^k)\ldots(p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots)^k}{(p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots)^{s+k}}$$

wo die Grössen $\nu_1, \nu_2, .$ in der unendlichfachen Summe alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen. Da nun die Producte $p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}.$ alle ganzen Zahlen vorstellen, so kann man diese Gleichung, indem man alle Glieder, welche denselben Nenner enthalten, vereinigt, auch in folgender Weise schreiben:

$$1)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\tilde{\omega}(n)}\,\pi^k(n)\,\varphi_k(n)}{n^{s+k}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s-k)}.$$

Ist speciell $k=1$, so erhält man die von H. E. Cesaro abgeleitete Relation:

$$2)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\pi(n)\,\varphi(n)}{n^{s+1}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)}.$$

Multiplicirt man die beiden Seiten der Gleichung 1) mit $\zeta(s-k)$, so erhält man:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^s} = \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\tilde{\omega}(n)}\,\pi^k(n)\,\varphi_k(n)}{(mn)^s}\left(\frac{m}{n}\right)^k$$

Vereinigt man auf der rechten Seite dieser Gleichung alle Glieder, in denen $mn=r$ ist, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^s} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\sum_d (-1)^{(k+1)\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)}\,\pi^k\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right)d^{2k}}{r^{s+k}}$$

wo die Summation bezüglich d über alle Divisoren von r zu erstrecken ist.

Die Vergleichung der Coëfficienten von r^s auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert die Formel:

$$3)\qquad \sum_d (-1)^{(k+1)\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} \pi^k\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) d^{2k} = r^k$$

wo d, wie auch in allen folgenden Relationen, alle Divisoren der ganzen Zahl r durchläuft.

Für $k = 1$ erhält man die specielle Relation:

$$4)\qquad \sum_d{}' \pi\left(\frac{r}{d}\right) \varphi\left(\frac{r}{d}\right) d^2 = r.$$

Man hat ferner:

$$\frac{\zeta(s-k)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-k}}}$$

$$= \prod_p \left\{1 + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{p^{\nu k}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)}{p^{\nu s}}\right\}$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots} \frac{(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots)^k \left(1-\frac{1}{p_1^k}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^k}\right)\ldots}{(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots)^s}$$

und daher:

$$5)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi_k(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(s)},$$

welche Gleichung für $k = 1$ in die bekannte Liouville'sche Formel:

$$6)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

übergeht.

Multiplicirt man die beiden Seiten der Gleichung 5) mit $\zeta(s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\varphi_k(n)}{(mn)^s} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r^k}{r^s}$$

und hat daher die Relation:

$$7)\qquad \sum_d \varphi_k(d) = r^k.$$

Für $k = 1$ erhält man die specielle Relation:

$$8)\qquad \sum_d \varphi(d) = r,$$

welche Gauss im 39. Artikel der Disquisitiones bewiesen hat.

Multiplicirt man die Gleichung 1) mit $\zeta(s-2k)$, schreibt sodann in 5) für s: $s-k$ und multiplicirt mit $\zeta(s)$, so ergibt die Vergleichung der beiden Resultate die Relation:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}(n)}\pi^k(n)\varphi_k(n)}{(mn)^{s-2k}n^{3k}} = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\varphi_k(n)}{(mn)^{s-k}m^k},$$

aus welcher sofort folgende Formel folgt:

$$9)\qquad \sum_d (-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} \pi^k\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) d^{3k} = r^k \sum_d d^k \varphi_k(d).$$

Setzt man in dieser Formel $k = 1$, so ergibt sich die von H. E. Cesaro mitgetheilte Relation:

$$10)\qquad \sum_d \pi\left(\frac{r}{d}\right) \varphi\left(\frac{r}{d}\right) d^3 = r \sum_d d\varphi(d).$$

Multiplicirt man die Gleichungen 1) und 5) mit einander, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}(n)}\pi^k(n)\varphi_k(n)\varphi_k(m)}{(mn)^s n^k} = 1$$

und deshalb:

$$11)\qquad \sum_d (-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} \pi^k\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_k(d) d^k = 0.$$

Aus der Definition von $\varphi_k(n)$ folgt, dass:

$$\varphi_k(m)\varphi_k(n) = \varphi_k(mn)$$

ist, falls m und n zu einander relativ prim sind. Ist nun r durch kein Quadrat theilbar, so sind d und $\frac{r}{d}$ zu einander relativ prim; man kann daher die letzte Relation durch $\varphi_k(r)$ dividiren, wodurch dieselbe in folgende Formel übergeht:

$$12)\qquad \sum_d (-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} d^k \pi^k\left(\frac{r}{d}\right) = 0.$$

Es ist, wie Herr Lipschitz bewiesen hat:

$$13)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}\,.$$

Multiplicirt man die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\zeta(s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu(n)}{(mn)^s} = 1$$

woraus sich sofort die bekannte Relation:

$$14)\qquad \sum_d \mu(d) = 0$$

ergibt.

Um eine allgemeinere Formel zu erhalten, verbinden wir die Gleichungen 5) und 13) mit einander. Man erhält durch dieses Verfahren:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\varphi_k(r)}{r^s} = \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu(n)\,m^k}{(mn)^s}$$

und hat daher die Relation:

$$15)\qquad \sum_d \mu\left(\frac{r}{d}\right) d \;= \varphi_k(r)$$

Multiplicirt man die Gleichungen 1) und 13) mit einander so ergibt sich:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mu(r) r^k}{r^s} = \sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\tilde{\omega}(n)} \pi^k(n) \varphi_k(n) \mu(m)}{(mn)^s n^k}$$

und daher:

$$16) \qquad \sum_d (-1)^{(k+1)\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} \pi^k\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) \mu(d) d^k = \mu(r) r^{2k},$$

welche Formel für $k = 1$ in die folgende übergeht:

$$17) \qquad \sum_d \pi\left(\frac{r}{d}\right) \varphi\left(\frac{r}{d}\right) \mu(d) d = \mu(r) r^2.$$

Es ist ferner:

$$\frac{\zeta(s)\zeta(2s-2k)}{\zeta(2s)\zeta(s-k)} = \prod_p \frac{1+\frac{1}{p^s}}{1+\frac{1}{p^{s-k}}}$$

$$= \prod_p \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu p^{\nu k}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)}{p^{\nu s}} \right\}$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots} \frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+\cdots} (p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots)^k \left(1-\frac{1}{p_1^k}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^k}\right)}{(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots)^s}$$

also:

$$18) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)\varphi_k(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s-2k)}{\zeta(2s)\zeta(s-k)}.$$

Die Verbindung von 5) und 18) liefert die Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\varphi_{2k}(r)}{r^{2s}} = \sum_{m,\, n=1}^{m,\, n=\infty} \frac{\lambda(n)\varphi_k(m)\varphi_k(n)}{(mn)^s},$$

aus welcher sich unmittelbar die folgende Formel ergibt:

$$19)\qquad \sum_d \lambda(d)\,\varphi_k(d)\,\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right)=0$$

wenn r kein Quadrat ist, hingegen:

$$20)\qquad \sum_d \lambda(d)\,\varphi_k(d)\,\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right)=\varphi_{2k}(\sqrt{r}).$$

wenn r ein Quadrat ist.

Aus 1) und 18) leitet man ferner die folgende Gleichung ab:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^{(k+1)\bar{\omega}(r)}\,\pi^k(r)\varphi_k(r)}{r^{s+k}}=\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty}\frac{(-1)^{\bar{\omega}(n)}\pi^{2k}(n)\varphi_{2k}(n)\lambda(m)\varphi_k(m)}{(mn^2)^s\,n^{2k}}$$

aus welcher sofort folgt:

$$21)\qquad \sum_{m,n}(-1)^{\bar{\omega}(n)}\pi^{2k}(n)\,\varphi_{2k}(n)\,\lambda(n)\,\varphi_k(m)m^k=$$
$$=(-1)^{(k+1)\bar{\omega}(r)}\,\pi^k(r)\,\varphi_k(r),$$

wo sich die Summation über alle Werthepaare m, n erstreckt, für welche:

$$mn^2=r$$

ist.

Aus der Verbindung von 1), 5) und 18) folgt ferner:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\lambda(r)\,\varphi_k(r)}{r^s}=\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty}\frac{(-1)^{(k+1)\bar{\omega}(m)}\,\pi^k(m)\,\varphi_k(m)\,\varphi_{2k}(n)}{(mn^2)\,m^k}$$

und daher:

$$22)\qquad \sum_{m,n}(-1)^{(k+1)\bar{\omega}(m)}\,\pi^k(m)\,\varphi_k(m)\varphi_{2k}(n)\,n^{2k}=r^k\lambda(r)\,\varphi_k(r),$$

wo m, n die eben angegebenen Werthepaare zu durchlaufen haben.

Schreibt man in der Gleichung 5) einmal für s: $s-\tau$, dann für k: $k+\tau$ und dividirt die so entstehenden Gleichungen durch einander, so erhält man die Relationen:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\varphi_{k+\tau}(r)}{r^s} = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\varphi_k(n)\varphi_\tau(m)n^\tau}{(mn)^s}$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\varphi_k(r)}{r^{s-\tau}} = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\tilde{\omega}(n)}\pi^k(n)\varphi_k(n)\varphi_{k+\tau}(m)}{(mn)^s n^k}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man folgende Formeln ab:

$$23)\qquad \sum_d d^\tau \varphi_k(d)\varphi_\tau\left(\frac{r}{d}\right) = \varphi_{k+\tau}(r) \qquad (\tau > 0)$$

$$24)\qquad \sum_d (-1)^{(k+1)\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} \pi^k\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_{k+\tau}(d)\,d^k = r^{k+\tau}\varphi_k(r) \qquad (\tau > 0).$$

Die Gleichungen 11) und 24) lassen sich in die folgende zusammenfassen:

$$25)\qquad \sum_d (-1)^{(k+1)\tilde{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} \pi^k\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_{k+\tau}(d)\,d^k = (1-\delta_{0,\tau})\,r^{k+\tau}\varphi_k(r)$$

wo:

$$\delta_{\lambda,\mu} = 0 \qquad (\lambda \gtrless \mu)$$
$$\delta_{\lambda,\lambda} = 1$$

ist.

Schreibt man in der Gleichung 5) für s der Reihe nach s, $s+k$, $s+2k, \ldots, s+(t-1)k$ und multiplicirt die dadurch entstehenden Gleichungen mit einander, so entsteht die Relation:

$$\frac{\zeta(s-k)}{\zeta(s+(t-1)k)} = \sum_{n_1,n_2\ldots,n_t=1}^{n_1,n_2\ldots,n_t=\infty} \frac{\varphi_k(n_1)\varphi_k(n_2)\ldots\varphi_k(n_t)}{(n_1 n_2\ldots n_t)^s n_2^k n_3^{2k}\ldots n_t^{(t-1)k}}$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $\zeta(s+(t-1)k)$, so erhält man:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r^k}{r^s} = \sum_{\ldots,n_{t+1}=1}^{n_1,n_2\ldots,n_{t+1}=\infty} \frac{\varphi_k(n_1)\varphi_k(n_2)\ldots\varphi_k(n_t)}{(n_1 n_2\ldots n_{t+1})^s n_2^k n_3^{2k}\ldots n_t^{(t-1)k} n_{t+1}^{(t-1)k}}$$

und daher:

26) $$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_t} \varphi_k(n_1)\varphi_k(n_2)\ldots\varphi_k(n_t) n_1^{(t-1)k} n_2^{(t-2)k} \ldots . n_{t-1}^k = r^{tk},$$

wo die Summation sich über alle Lösungen der Gleichung:

$$n_1 n_2 \ldots n_{t+1} = n$$

zu erstrecken hat.

Setzt man speciell $k = 1$, so erhält man die von H. G. Cantor mitgetheilte Formel:

27) $$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_t} \varphi(n_1)\varphi(n_2)\ldots\varphi(n_t) n_1^{t-1} n_2^{t-2} \quad . n_{t-1} = r^t.$$

Man hat ferner:

$$\zeta(\tau s)\zeta(s-k) = \sum_{m, n=1}^{m, n=\infty} \frac{m^k}{(mn^\tau)^s}$$

also:

28) $$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{k,\tau}(r)}{r^s} = \zeta(\tau s)\zeta(s-k).$$

Von den speciellen Formeln, welche in dieser Gleichung enthalten sind, mögen die folgenden erwähnt werden:

29) $$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{0,\tau}(r)}{r^s} = \zeta(\tau s)\zeta(s)$$

30) $$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\psi_k(r)}{r^s} = \zeta(s)\zeta(s-k)$$

31) $$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\psi(r)}{r^s} = \zeta(s)^2.$$

Schreibt man in der Gleichung 29) für τ: 2τ und multiplicirt die so veränderte Gleichung mit 28), so erhält man:

$$\zeta(s)\zeta(s-k)\zeta(\tau s)\zeta(2\tau s) = \sum_{m, w=1}^{m, n=\infty} \frac{\rho_{0,2\tau}(m)\rho_{k,\tau}(n)}{(mn)^s}$$

oder auch:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\psi_k(m)\,\rho_{0,\,2}(n)}{(mn^\tau)^s} = \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\rho_{0,\,2\tau}(m)\,\rho_{k,\,\tau}(n)}{(mn)^s}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$32)\qquad \sum_{m,\,n} \psi_k(m)\,\rho_{0,\,2}(n) = \sum_d \rho_{0,\,2\tau}(d)\,\rho_{k,\,\tau}\left(\frac{r}{d}\right)$$

wo die Summation sich über alle Werthepaare m, n erstreckt, welcher der Gleichung:

$$mn^\tau = r$$

genügen.

Für $\tau = 1$ werden die beiden Seiten der vorstehenden Gleichung, wie man sofort sieht, identisch.

Schreibt man in der Gleichung 32) für k: $-k$ und beachtet, dass:

$$m^k\,\psi_{-k}(m) = \psi_k(m)$$

ist, so erhält man:

$$33)\qquad \sum_{m,\,n} n^{\tau k}\,\psi_k(m)\,\rho_{0,2}(n) = \sum_d d^k\rho_{0,\,2\tau}(d)\,P_{k,\,\tau}\left(\frac{r}{d}\right). \qquad (mn^\tau = r)$$

Die Verbindung der Gleichungen 5) und 28) liefert die Relation:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\varphi_{\tau k}(n)\,\rho_{\nu,\,\tau}(m)}{(mn^\tau)^s} = \zeta\,(\tau s - \tau k)\,\zeta\,(s-\nu)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{\nu-k,\,\tau}(r)}{r^{s-k}}$$

und daher:

$$34)\qquad \sum_{m,\,n} \varphi_{\tau k}(n)\,\rho_{\nu.\,\tau}(m) = r^k\,\rho_{\nu-k,\,\tau}(r)$$

wo die Summation sich auf alle Werthepaare m, n bezieht, welche Lösungen der Gleichung:

$$mn^\tau = r$$

sind.

Für $\tau = 1$ geht diese Formel in die folgende über:

$$\sum_{d} \varphi_k\left(\frac{r}{d}\right)\psi_\nu(d) = r^k \psi_{\nu-k}(r). \tag{35}$$

Schreibt man in der Gleichung 34) für ν: $-\nu$, so erhält man:

$$\sum_{m,n} n^{\tau\nu} \varphi_{\tau k}(n) P_{\nu,\tau}(m) = P_{\nu+k,\tau}(r) \qquad (mn^\tau = r) \tag{36}$$

und speciell:

$$\sum_{d} \varphi_k(d)\, d^\nu \psi_\nu\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_{\nu+k}(r). \tag{37}$$

Aus der Gleichung 28) folgt ferner die Beziehung:

$$\zeta(\tau s)^2 \zeta(s-k)\zeta(s-\nu) = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\rho_{k,\tau}(m)\rho_{\nu,\tau}(n)}{(mn)^s}$$

oder auch:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\psi_{\nu-k}(m)\psi(n)\, m^k}{(mn^\tau)^s} = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\rho_{k,\tau}(m)\rho_{\nu,\tau}(n)}{(mn)^s}$$

und daher:

$$\sum_{m,n} \psi_{\nu-k}(m)\psi(n)\, m^k = \sum_{d} \rho_{k,\tau}(d)\, \rho_{\nu,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) \tag{38}$$

wo die Zahlen m, n alle Werthepaare durchlaufen, für welche:

$$mn^\tau = r$$

ist.

Für $\tau = 1$ erhält man:

$$\sum_{d} d^k \psi_{\nu-k}(d)\psi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \psi_k(d)\psi_\nu\left(\frac{r}{d}\right), \tag{39}$$

welche Formel zuerst Liouville abgeleitet hat.

Multiplicirt man die Gleichung 28) mit $\zeta(s-\nu)$, so erhält man:

$$\zeta(\tau s)\zeta(s-k)\zeta(s-\nu) = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\rho_{k,\tau}(n)\, n^\nu}{(mn)^s}$$

Schreibt man aber in 28) für k: ν und multiplicirt sodann mit $\zeta(s-k)$, so ergibt sich:

$$\zeta(\tau s)\zeta(s-k)\zeta(s-\nu)=\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\rho_{\nu,\tau}(m)n^k}{(mn)^s}.$$

Man hat daher die Relation:

$$\sum_d d^\nu \rho_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_d d^k \rho_{\nu,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) \tag{40}$$

Schreibt man in dieser Formel einmal für k: $-k$, sodann für k: $-k$ und gleichzeitig für ν: $-\nu$, so erhält man die beiden Relationen:

$$\sum_d d^{k+\nu} P_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_d d^k \rho_{\nu,\tau}(d) \tag{41}$$

$$\sum_d d^{k-\nu} P_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_d d^{k-\nu} P_{\nu,\tau}(d) \tag{42}$$

Für $\tau=1$ erhält man die Formeln:

$$\sum_d d^\nu \psi_k\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_d d^k \psi_\nu\left(\frac{r}{d}\right) \tag{43}$$

$$\sum_d d^{k+\nu} \psi_k\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_d d^k \psi_\nu(d) \tag{44}$$

$$\sum_d d^k \psi_{k+\nu}\left(\frac{r}{d}\right)=\sum_d d^k \psi_\nu(d). \tag{45}$$

Schreibt man in der Gleichung 5) für k: ν, für s: $s-k$ und multiplicirt sodann die so entstehende Gleichung mit der Formel 28), so erhält man die Relation:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty}\frac{\varphi_\nu(n)\rho_{k,\tau}(m)n^k}{(mn)_s}=\zeta(\tau s)\zeta(s-\nu-k)$$

$$=\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{\rho_{\nu+k,\tau}(r)}{r^s}$$

und deshalb:

46) $$\sum_d \varphi_\nu(d)\, d^k \rho_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = \rho_{k+\nu,\tau}(r).$$

Von den speciellen Fällen dieser Relation mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

47) $$\sum_d \varphi_\nu(d)\, d^k \psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_{k+\nu}(r)$$

48) $$\sum_d \varphi_\nu(d)\, \rho_{0,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = \rho_{\nu,\tau}(r).$$

Den speciellen Fall:

$$\nu = 1, \quad k = 0$$

der Formel 47):

49) $$\sum_d \varphi(d)\psi\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_1(r)$$

hat H. G. Cantor mitgetheilt.

Schreibt man in den Gleichungen 46) und 47) für k: $-k$, so erhält man:

50) $$\sum_d \varphi_\nu(d)\, P_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = r^k \rho_{\nu-k,\tau}(r)$$

51) $$\sum_d \varphi_\nu(d)\, \psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_{\nu-k}(r)$$

Durch die Verbindung von 1) und 28) erhält man:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{\nu,\tau}(r)}{r^s} = \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}(n)}\,\pi^k(n)\,\varphi_k(n)\,\rho_{k+\nu,\tau}(m)}{(mn)^s n^{k-\nu}}$$

woraus sich folgende Relation ergibt:

52) $$\sum_d (-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}(d)}\, d^{\nu-k}\, \pi^k(d)\, \varphi_k(d)\, \rho_{k+\nu,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = \rho_{\nu,\tau}(r)$$

also speciell:

$$53)\qquad \sum_{d} (-1)^{(k+1)\bar{\omega}(d)}\, d^{\nu-k}\, \pi^k(d)\, \varphi_k(d)\, \psi_{k+\nu}\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_\nu(r).$$

Schreibt man für ν: $-\nu$, so erhält man ferner:

$$54)\qquad \sum_{d} (-1)^{(k+1)\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} d^{k+\nu}\, \pi^k\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) \rho_{k-\nu,\tau}(d) = r^k P_{\nu,\tau}(r)$$

$$55)\qquad \sum_{d} (-1)^{(k+1)\bar{\omega}\left(\frac{r}{d}\right)} d^{k+\nu}\, \pi^k\left(\frac{r}{d}\right) \varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) \psi_{k-\nu}(d) = r^k \psi_\nu(r).$$

Man hat ferner:

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-\dfrac{1}{p^{2s}}}{1-\dfrac{1}{p^s}}$$

$$= \prod_p \frac{1}{1+\dfrac{1}{p^s}}$$

$$= \prod_p \left\{1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{p^{\nu s}}\right\}$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots} \frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+\cdots}}{(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdot\;\; .)^s}$$

also:

$$56)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

eine Formel, welche übrigens schon wiederholt abgeleitet wurde.

Multiplicirt man dieselbe mit $\zeta(s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)}{(mn)^s} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2s}}$$

und hat daher die bekannte Relation:

$$57)\qquad \sum_{d} \lambda(d) = 0,$$

wenn r kein Quadrat ist, hingegen:

$$\sum_{d} \lambda(d) = 1 \tag{58}$$

wenn r ein Quadrat ist.

Schreibt man in der Gleichung 56) für s: τs und multiplicirt sodann mit 28), so erhält man:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{k,2\tau}(r)}{r^s} = \sum_{m,n=1}^{n=\infty} \frac{\rho_{k,\tau}(m)\lambda(n)}{(mn^\tau)^s}$$

und daher:

$$\sum_{m,n} \rho_{k,\tau}(m)\lambda(n) = \rho_{k,2\tau}(r) \tag{59}$$

wo die Summation sich über alle Lösungen der Gleichung:

$$mn^\tau = r$$

zu erstrecken hat.

Schreibt man in dieser Formel für k: $-k$, so verwandelt sie sich in:

$$\sum_{m,n} \lambda(n)\, n^{\tau k} P_{k,\tau}(m) = P_{k,2\tau}(r) \qquad (mn^\tau = r). \tag{60}$$

Für $\tau = 1$ erhält man speciell:

$$\sum_{d} \psi_k(d)\lambda\left(\frac{r}{d}\right) = \rho_{k,\tau}(r). \tag{61}$$

Es ist ferner:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)n^k \rho_{k,2\tau}(m)}{(mn)^s} = \zeta(2\tau s)\zeta(2s-2k)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\rho_{2k,\tau}(r)}{r^{2s}}$$

Aus dieser Relation folgt:

$$\sum_{d} \lambda(d)\, d^k \rho_{k,2\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = 0 \tag{62}$$

wenn r kein Quadrat ist, aber:

63) $$\sum_d \lambda(d) d^k \rho_{k,2\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = \rho_{2k,\tau}(\sqrt{r})$$

wenn r ein Quadrat ist.

Diese zwei Relationen verwandeln sich, wenn für k: $-k$ geschrieben wird, in die folgenden:

64) $$\sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right) P_{k,2\tau}(d) = 0$$

65) $$\sum_d \lambda\left(\frac{r}{d}\right) P_{k,2\tau}(d) = P_{2k,\tau}(\sqrt{r}),$$

Man hat ferner:

$$\frac{\zeta(2s)\zeta(2\tau s - 2\tau k)}{\zeta(s)\zeta(\tau s - \tau k)} = \prod_p \frac{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^{\tau s-\tau k}}\right)}{\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{2\tau s-2\tau k}}\right)}$$

$$= \prod_p \frac{1}{\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^{\tau s-\tau k}}\right)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)\lambda(m) n^{\tau k}}{(mn^\tau)^s}.$$

Ist nun τ eine ungerade Zahl, so ist:

$$\lambda(n^\tau) = \lambda(n)$$

und daher:

$$\lambda(n)\lambda(m) = \lambda(mn^\tau).$$

Die letzte Gleichung kann daher, wenn τ ungerade ist, auch in folgender Form geschrieben werden:

96) $$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r) P_{k,\tau}(r)}{r^s} = \frac{\zeta(2s)\zeta(2\tau s - 2\tau k)}{\zeta(s)\zeta(\tau s - \tau k)}.$$

Für $\tau = 1$ verwandelt sich diese Formel in die von H. E. Cesaro abgeleitete Gleichung:

67) $$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r)\psi_k(r)}{r^s} = \frac{\zeta(2s)\zeta(2s-2k)}{\zeta(s)\zeta(s-k)}.$$

Multiplicirt man die Gleichung 66) mit $\zeta(s)\zeta(\tau s-\tau k)$, so erhält man:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{P_{2k,\tau}(r)}{r^{2s}} = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(m)P_{k,\tau}(m)P_{k,\tau}(n)}{(mn)^s}$$

und deshalb:

68) $$\sum_d \lambda(d)P_{k,\tau}(d)P_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = 0$$

wenn r kein Quadrat ist, hingegen:

6) $$\sum_d \lambda(d)P_{k,\tau}(d)P_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = P_{2k,\tau}(\sqrt{r})$$

wenn r ein Quadrat ist.

Für $\tau = 1$ erhält man beziehungsweise die beiden Formeln:

70) $$\sum_d \lambda(d)\,\psi_k(d)\psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = 0$$

71) $$\sum_d \lambda(d)\psi_k(d)\psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \psi_{2k}(\sqrt{r}).$$

Schreibt man für k: $-k$, so verwandeln sich die Gleichungen 68) und 69) in:

72) $$\sum_d \lambda(d)\rho_{k,\tau}(d)\rho_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = 0$$

73) $$\sum_d \lambda(d)\rho_{k,\tau}(d)\rho_{k,\tau}\left(\frac{r}{d}\right) = \rho_{2k,\tau}(\sqrt{r}).$$

Schreibt man in der Gleichung 56) für s: $s-k$ und multiplicirt die dadurch entstehende Relation mit $\zeta(s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\lambda(n)\,n}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(2s-2k)}{\zeta(s-k)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}\,(n)}\,\pi^k(n)\,\varphi_k(n)\,m^{2k}}{(m^2 n)^s\, n^k}$$

Diese Gleichung liefert die Relation:

74) $$r^k \sum_d d^k \lambda(d) = \sum_{m,\,n} (-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}\,(m)}\,\pi^k(m)\,\varphi_k\,(m)\,n^{4k}$$

wo sich die Summation über alle Werthepaare m, n zu erstrecken hat, für welche:

$$mn^2 = r$$

ist.

Es ist ferner, wie schon H. G. Cantor hervorgehoben hat:

75) $$\zeta(s)^\beta = \sum_{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_\beta=1}^{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_\beta=\infty} \frac{1}{(n_1 n_2 \,.\; \;.\, n_\beta)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_\beta(n)}{n^s}.$$

Aus dieser Relation folgt:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{f_\beta(r)}{r^s} = \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_{\beta-\gamma}(m) f_\gamma(n)}{(mn)^s}$$

also:

76) $$\sum_d f_{\beta-\gamma}(d) f_\gamma\left(\frac{r}{d}\right) = f_\beta(r),$$

welche Relation für $\gamma = 1$ in die von H. G. Cantor mitgetheilte Formel:

77) $$\sum_d f_{\beta-1}(d) = f_\beta(r)$$

übergeht. Für $\gamma = 2$ erhält man:

78) $$\sum_d f_{\beta-2}(d)\,\psi\left(\frac{r}{d}\right) = f_\beta(r).$$

Man hat:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_{2\beta}(n)}{n^s} = \zeta(s)^{2\beta}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(n)}{n^s}\right)^\beta$$

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_\beta = 1}^{\ldots, n_\beta = \infty} \frac{\psi(n_1)\psi(n_2)\ldots\psi(n_\beta)}{(n_1 n_2 \ldots n_\beta)^s}$$

also auch:

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_\beta} \psi(n_1)\psi(n_2)\ldots\psi(n_\beta) = f_{2\beta}(n), \tag{79}$$

wo die Summation sich über alle Lösungen der Gleichung:

$$n_1 n_2 \ldots n_\beta = n$$

erstreckt.

Nimmt man $\beta = 2$, so hat man speciell:

$$\sum_d \psi(d)\psi\left(\frac{r}{d}\right) = f_4(r). \tag{80}$$

Es soll nun für die zahlentheoretische Function $f_4(r)$ ein anderer Ausdruck abgeleitet werden. Es ist:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{f_4(r)}{r^s} = \zeta(s)^4$$

$$= \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^4}$$

$$= \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{2s}}}\right)^2 \prod_p \left(\frac{1 + \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^s}}\right)^2$$

$$\zeta(2s)^2 \prod_p \left\{1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{4\nu}{p^{\nu s}}\right\}$$

$$= \zeta(2s)^2 \sum_{\nu^2, \nu_2,} \frac{4^{\tilde{\omega}(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots)} \nu_1 \nu_2 \cdot}{(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdot \quad)^s}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\omega^2(m)\sigma(m)\psi(n)}{(mn^2)^s}$$

Man hat demnach die Relation:

$$\sum_{m,n} \omega^2(m)\sigma(m)\psi(n) = f_4(r) \tag{81}$$

wo die Summation sich über alle Lösungssysteme der Gleichung

$$mn^2 = r$$

erstreckt.

Multiplicirt man die Gleichungen 56) und 75) mit einander so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_\beta(m)}{(mn)^s} = \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-1}(n)}{(m^2 n)^s}$$

und daher:

$$\sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right) f_\beta(d) = \sum_{d_2} f_{\beta-1}(d_2) \tag{82}$$

wo die Summation bezüglich d_2 sich über alle Divisoren der ganzen Zahl r erstreckt, deren complementärer Divisor ein Quadrat ist.

Verbindet man die Gleichungen 30) und 75), so erhält man ferner:

$$\sum_{n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_\beta(m)\psi_k(n)}{(mn)^s} = \zeta(s)^{\beta+1}\zeta(s-k)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta+1}(m) n^k}{(mn)^s}$$

und daher:

$$\sum_{d} f_\beta(d)\psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} f_{\beta+1}\left(\frac{r}{d}\right) d^k. \tag{83}$$

Aus der Verbindung von 29) und 75) folgt ferner:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_\beta(m)\,\rho_{0,\tau}(n)}{(mn)^s} = \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_{\beta+1}(m)}{(mn^\tau)^s}$$

also:

84) $$\sum_d \rho_{0,\tau}(d) f_\beta\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d_\tau} f_{\beta+1}(d_\tau)$$

wo die Zahlen d_τ alle Divisoren der Zahl r durchlaufen, deren complementärer Divisor eine τ^{te} Potenz ist.

Verbindet man die Gleichungen 13) und 75) mit einander, so erhält man:

$$\sum_{n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu(n) f_\beta(m)}{(mn)^s} = \zeta(s)^{\beta-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{f_{\beta-1}(r)}{r^s}$$

also auch:

85) $$\sum_d \mu\left(\frac{r}{d}\right) f_\beta(d) = f_{\beta-1}(r)$$

Es ist ferner:

86) $$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-\dfrac{1}{p^{2s}}}{1-\dfrac{1}{p^s}}$$

$$= \prod_p \left(1+\frac{1}{p^s}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 75) und 86) mit einander, so ergibt sich die Formel:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\mu^2(n) f_\beta(m)}{(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^{\beta+1}}{\zeta(2s)}$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{f_{\beta+1}(m)}{(mn^2)^s}$$

aus welcher folgt:

$$87)\qquad \sum_d \mu^2\left(\frac{r}{d}\right) f_\beta(d) = \sum_{d_2} f_{\beta+1}(d_2).$$

Aus der Gleichung 75) leitet man auch leicht den schon von H. G. Cantor mitgetheilten Werth von $f_\beta(n)$ ab. Man hat nämlich:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_\beta(n)}{n^s} = \zeta(s)^\beta$$

$$= \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^\beta}$$

$$= \prod_p \left\{1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\Pi(\nu+\beta-1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\nu)\, p^{\nu s}}\right\}$$

$$= \sum_{\nu_1,\,\nu_2,\,\ldots} \frac{\Pi(\nu_1+\beta-1)\,\Pi(\nu_2+\beta-1).}{[\Pi(\beta-1)]^{\tilde\omega(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2}\ldots)}\, \Pi(\nu_1)\,\Pi(\nu_2)\ldots(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2}\ldots)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\Pi(\nu_1+\beta-1)\,\Pi(\nu_2+\beta-1)\ldots\Pi(\nu^q+\beta-1)}{[\Pi(\beta-1)]^{\tilde\omega(n)}\, \Pi(\nu_1)\,\Pi(\nu_2)\ldots\Pi(\nu_q)\, n^s}$$

und daher:

$$88)\qquad f_\beta(n) = \frac{\Pi(\nu_1+\beta-1)\Pi(\nu_2+\beta-1)\ldots\Pi(\nu_q+\beta-1)}{\Pi(\nu_1)\,\Pi(\nu_2)\ldots\Pi(\nu_q)[\Pi(\beta-1)]^{\tilde\omega(n)}}$$

Man hat ferner:

$$89)\qquad \frac{\zeta(2s)^\beta}{\zeta(s)^{\beta+1}} = \prod_p \frac{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\beta+1}}{\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^\beta}$$

$$= \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{\left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^\beta}$$

$$= \prod_{p} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu}\, \Pi(\beta+\nu_1-2)(\beta+2\nu-1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\nu)\, p^{\nu s}} \right\}$$

$$= \sum_{\nu_2, \ldots} \frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+\cdots}\, \Pi(\beta+\nu_1-2)\, \Pi(\beta+\nu_2-2) \ldots (\beta+2\nu_1-1)(\beta+2\nu_2-1)\ldots}{[\Pi(\beta-1)]^{\tilde{\omega}(p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2}\ldots)}\, \Pi(\nu_1)\, \Pi(\nu_2) \ldots (p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots)^s}$$

Beachtet man, dass:

$$(\beta+2\nu_1-1)(\beta+2\nu_2-1) \ldots (\beta+2\nu_q-1) = \psi(n^2 \pi^{\beta-2}(n)) \qquad (\beta \geqq 2)$$

ist, so hat man:

$$\text{90)} \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n)\, \psi(n^2 \pi^{\beta-2}(n))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(n)}\, n^s} = \frac{\zeta(2s)^{\beta}}{\zeta(s)^{\beta+1}} \qquad (\beta \geqq 2)$$

Nimmt man speciell:

$$\beta = 2; \quad \beta = 3$$

so erhält man die bekannten Relationen:

$$\text{91)} \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)\, \psi(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)^2}{\zeta(s)^3}$$

$$\text{92)} \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)\, \psi^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)^3}{\zeta(s)^4}$$

Setzt man in der Gleichung 89) $\beta = 1$, so erhält man:

$$93)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)\,2^{\tilde{\omega}(n)}}{n^s} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)\,\omega(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)^2},$$

welche Formel schon H. E. Cesaro abgeleitet hat.

Multiplicirt man die Gleichung 90) mit $\zeta(s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-2}(n))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(n)}(mn)^s} = \left(\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\right)^\beta$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_\beta=1}^{n_1, n_2, \ldots, n_\beta=\infty} \frac{\lambda(n_1)\lambda(n_2)\ldots\lambda(n_\beta)}{(n_1 n_2 \ldots n_\beta)^s}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r) f_\beta(r)}{r^s}$$

und daher:

$$94)\qquad \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-2}(d))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(d)}} = \lambda(r) f_\beta(r).$$

Als specielle Fälle dieser Relation mögen folgende Gleichungen hervorgehoben werden:

$$95)\qquad \sum_d \lambda(d)\,\psi(d^2) = \lambda(r)\,\psi(r)$$

$$96)\qquad \sum_d \lambda(d)\,\psi^2(d) = \lambda(r) f_3(r).$$

Aus der Gleichung 93) leitet man durch dasselbe Verfahren folgende Relation ab:

$$97)\qquad \sum_d \lambda(d)\,\omega(d) = \lambda(r).$$

Schreibt man in der Gleichung 75) für β: $\beta+1$ und multiplicirt sodann die so veränderte Gleichung mit der Relation 90), so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n) f_{\beta-1}(n)\, \psi(n^2 \pi^{\beta-2}(n)) f_{\beta+1}(m)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(n)} (mn)^s} = \zeta(2s)^\beta$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{f_\beta(r)}{r^{2s}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\text{98)} \qquad \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d)) f_{\beta+1}\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} = 0,$$

wenn r kein Quadrat ist, und:

$$\text{99)} \qquad \sum_d \frac{\lambda(d) f_{\beta-1}(d)\, \psi(d^2 \pi^{\beta-2}(d)) f_{\beta+1}\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}} = f_\beta(\sqrt{r})$$

wenn r ein Quadrat ist.

Speciell hat man beziehungsweise:

$$\text{100)} \qquad \sum_d \lambda(d)\, \psi(d^2) f_3\left(\frac{r}{d}\right) = 0$$

$$\text{101)} \qquad \sum_d \lambda(d)\, \psi(d^2) f_3\left(\frac{r}{d}\right) = \psi(\sqrt{r})$$

$$\text{102)} \qquad \sum_d \lambda(d)\, \psi^2(d) f_4\left(\frac{r}{d}\right) = 0$$

$$\text{103)} \qquad \sum_d \lambda(d)\, \psi^2(d) f_4\left(\frac{r}{d}\right) = f_3(\sqrt{r}).$$

Aus der Gleichung 93) leitet man ab:

$$\text{104)} \qquad \sum_d \lambda(d)\, \omega(d)\, \psi\left(\frac{r}{d}\right) = 0,$$

wenn r kein Quadrat, und:

$$\text{105)} \qquad \sum_d \lambda(d)\, \omega(d)\, \psi\left(\frac{r}{d}\right) = 1,$$

wenn r ein Quadrat ist.

Multiplicirt man die Gleichungen 56) und 90) mit einander, so ergibt sich die Formel:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\lambda(n)\lambda(m) f_{\beta-1}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-2}(n))}{(\beta-1)^{\bar\omega(n)}(mn)^s} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\lambda(r) f_\beta(r)\psi(r^2\pi^{\beta-1}(r))}{\beta^{\bar\omega(r)}\, r^s}$$

aus welcher folgt:

$$\text{106)}\qquad \sum_d \frac{f_{\beta-1}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-2}(d))}{(\beta-1)^{\bar\omega(d)}} = \frac{f_\beta(r)\,\psi(r^2\pi^{\beta-1}(r))}{\beta^{\bar\omega(r)}}.$$

Specielle Fälle dieser Relation sind die Formeln:

$$\text{107)}\qquad \sum_d \psi(d^2) = \psi^2(r)$$

$$\text{108)}\qquad \sum_d \psi^2(d) = \frac{f_3(r)\,\psi(r^2\pi^2(r))}{3^{\bar\omega(r)}}.$$

Aus der Gleichung 13) ergibt sich auf demselben Wege die Gleichung:

$$\text{109)}\qquad \sum_d \omega(d) = \psi(r^2).$$

Schreibt man in der Gleichung 93) für s: τs und multiplicirt die dadurch entstehende Gleichung mit 28), so erhält man:

$$\sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\lambda(n)\,\omega(n)\,\rho_{k,\,\tau}(m)}{(mn^\tau)^s} = \frac{\zeta(2\tau s)}{\zeta(\tau s)}\,\zeta(s-k)$$

$$= \sum_{m,\,n=1}^{m,\,n=\infty} \frac{\lambda(n)\,m^k}{(mn^\tau)^s}$$

und daher:

$$\text{110)}\qquad \sum_{m,\,n} \lambda(n)\,\omega(n)\,\rho_{k,\,\tau}(m) = \sum_{m,\,n} \lambda(n)\,m^k$$

wo die Summation über alle Lösungen der Gleichung:

$$mn^\tau = r$$

auszudehnen ist.

Schreibt man für k: $-k$, so wird diese Relation:

111) $$\sum_{m,n} \lambda(n)\,\omega(n)\,n^{\tau k} P_{k,\tau}(m) = \sum_{d} \lambda(n)\,n^{\tau k} \qquad (mn^{\tau} = r).$$

Für $\tau = 1$ erhält man die speciellen Relationen:

112) $$\sum_{d} \lambda(d)\,\omega(d)\,\psi\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right) d^{k}$$

113) $$\sum_{d} \lambda(d)\,\omega(d)\,d^{k}\,\psi_{k}\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda(d)\,d^{k}.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichung 93) mit $\zeta(s-k)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\lambda(n)\,\omega(n)\,m^{k}}{(mn)^{s}} = \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(s)} \quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{\varphi_{k}(n)\,\lambda(m)}{(mn)^{s}}$$

also:

114) $$\sum_{d} d^{k}\,\lambda\left(\frac{r}{d}\right)\omega\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda\left(\frac{r}{d}\right)\varphi_{k}(d),$$

welche Relation durch Multiplication mit $\lambda(r)$ in die folgende verwandelt wird

115) $$\sum_{d} d^{k}\,\lambda(d)\,\omega\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_{d} \lambda(d)\,\varphi_{k}(d).$$

Man hat ferner:

$$\frac{\zeta(s)^{\beta}}{\zeta(2s)} = \prod_{p} \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{\beta}}$$

$$= \prod_{p} \frac{1+\frac{1}{p^{s}}}{\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{\beta-1}}$$

$$= \prod_p \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\Pi(\nu+\beta-3)(2\nu+\beta-2)}{\Pi(\beta-2)\Pi(\nu)p^{\nu s}} \right\}$$

$$= \sum \frac{\Pi(\nu_1+\beta-3)\Pi(\nu_2+\beta-3)\ldots\ldots\ldots(2\nu_1+\beta-2)(2\nu_2+\beta-2)\ldots\ldots}{[\Pi(\beta-2)]^{\tilde\omega(p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots)}\Pi(\nu_1)\Pi(\nu_2)\ldots(p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\ldots)^s}$$

oder auch:

116) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))}{(\beta-2)^{\tilde\omega(n)}n^s} = \frac{\zeta(s)^\beta}{\zeta(2s)}.$$

Von speciellen Fällen dieser Relation mögen die Folgenden erwähnt werden:

117) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$$

118) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}.$$

Für $\beta = 2$ erhält man:

119) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\omega(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}$$

Multiplicirt man die Gleichung 116) mit $\zeta(2s)$, so erhält man:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))}{(\beta-2)^{\tilde\omega(n)}(m^2n)^s} = \zeta(s)^\beta$$

$$= \sum_{r=}^{r=\infty} \frac{f_\beta(r)}{r^s}$$

und daraus:

$$\text{120)} \qquad \sum_{d_2} \frac{f_{\beta-2}(d_2)\,\psi(d_2^2\pi^{\beta-3}(d_2))}{(\beta-2)^{\tilde\omega(d_2)}} = f_\beta(r).$$

Specielle Fälle dieser Relation sind:

$$\text{121)} \qquad \sum_{d_2} \psi(d_2^2) = f_3(r)$$

$$\text{122)} \qquad \sum_{d_2} \psi^2(d_2) = f_4(r).$$

Aus 119) folgt:

$$\text{123)} \qquad \sum_{d_2} \omega(d_2) = \psi(r).$$

Multiplicirt man die Gleichungen 5) und 116) mit einander, so entsteht die Relation:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))\,\varphi_k(m)}{(\beta-2)^{\tilde\omega(n)}(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^{\beta-1}}{\zeta(2s)}\,\zeta(s-k)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-3}(n)\,\psi(n^2\pi^{\beta-4}(n))\,m^k}{(\beta-3)^{\tilde\omega(n)}(mn)^s}$$

aus welcher folgt:

$$\text{124)} \quad \sum_{d} \frac{f_{\beta-2}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-3}(d))\,\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-2)^{\tilde\omega(d)}} = r^k \sum_{d} \frac{f_{\beta-3}(d)\,\psi(d^2\pi^{\beta-4}(d))}{(\beta-3)^{\tilde\omega(d)}\,d^k}.$$

Als specielle Fälle dieser Relation mögen folgende Formeln angeführt werden:

$$125)\qquad \sum_d \psi^2(d)\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) = r^k \sum_d \frac{\psi(d^2)}{d^k}$$

$$126)\qquad \sum_d \psi(d^2)\varphi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \omega\left(\frac{r}{d}\right) d^k.$$

Durch Multiplication der Gleichungen 30) und 116) ergibt sich die Formel:

$$\sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-2}(n)\psi(n^2\pi^{\beta-3}(n))\psi_k(m)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(n)}(mn)^s} = \frac{\zeta(s)^{\beta+1}}{\zeta(s)}\zeta(s-k)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{m,n=\infty} \frac{f_{\beta-1}(n)\psi(n^2\pi^{\beta-2}(n))m^k}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(n)}(mn)^s}$$

aus welcher folgt:

$$127)\qquad \sum_d \frac{f_{\beta-2}(d)\psi(d^2\pi^{\beta-3}(d))\psi_k\left(\frac{r}{d}\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}} = r^k \sum_d \frac{f_{\beta-1}(d)\psi(d^2\pi^{\beta-2}(d))}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}d^k}.$$

Specielle Fälle dieser Relation sind die Formeln:

$$128)\qquad \sum_d \psi(d^2)\psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \psi^2\left(\frac{r}{d}\right) d^k$$

$$129)\qquad \sum_d \omega(d)\psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d d^k\psi\left(\frac{r^2}{d^2}\right).$$

Schreibt man in der Gleichung 127) für k: $-k$, so verwandelt sich dieselbe in:

$$130)\qquad \sum_d \frac{f_{\beta-2}(d)\psi(d^2\pi^{\beta-3}(d))\psi_k\left(\frac{r}{d}\right)d^k}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(d)}} =$$

$$= \sum_d \frac{f_{\beta-1}(d)\psi(d^2\pi^{\beta-2}(d))d^k}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(d)}},$$

aus welcher Relation folgende specielle Formeln sich ergeben:

$$131)\qquad \sum_d \psi(d^2)d^k\psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d \psi^2(d)d^k$$

$$132)\qquad \sum_d \omega(d)d^k\psi_k\left(\frac{r}{d}\right) = \sum_d d^k\psi(d^2).$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\left[\frac{n}{x}\right] = \sum_{y} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right) \tag{133}$$

ist, so hat man:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \varphi_k(x) = \sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right) \varphi_k(x)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \sum_{d} \varphi_k(d)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) r^k$$

oder:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \varphi_k(x) = \sum_{r=1}^{r=n} r^k. \tag{134}$$

Setzt man speciell $k = 1$, so hat man die Dirichlet'sche Formel:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \varphi(x) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{135}$$

Für $k = 3$ hat man:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{r}\right] \varphi_3(x) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{136}$$

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \frac{(-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}(x)}\,\pi^k(x)\,\varphi_k(x)}{x^{2k}} =$$

$$= \sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right) \frac{(-1)^{(k+1)\,\tilde{\omega}(x)}\,\pi^k(x)\,\varphi_k(x)}{x^{2k}}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \sum_{d} \frac{(-1)^{(k+1)\tilde{\omega}(d)} \pi^k(d) \varphi_k(d)}{d^{2k}}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\varepsilon\left(\frac{n}{r}\right)}{r^k}$$

oder:

$$137) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \frac{(-1)^{(k+1)\tilde{\omega}(x)} \pi^k(x) \varphi_k(x)}{x^{2k}} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r^k}.$$

Es ist:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \lambda(x) = \sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right) \lambda(x)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \sum_{d} \lambda(d)$$

und daher nach 57) und 58):

$$138) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \lambda(x) = Q_{(n)}$$

wo $Q_{(n)}$ die Anzahl der Quadrate ist, welche n nicht übertreffen.

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \omega(x) = \sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right) \omega(x)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \sum_{d} \omega(d)$$

also:

$$139) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \omega(x) = \sum_{r=1}^{r=n} \psi(r^2).$$

Man erhält auf demselben Wege noch leicht folgende Formeln:

140) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\omega(x)\lambda(x)=\sum_{r=1}^{r=n}\lambda(r)$$

141) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x^{\tau}}\right]x^{\tau k}=\sum_{r=1}^{r=\left[n^{\frac{1}{\tau}}\right]}P_{k,\tau}(r)$$

142) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\lambda(x)\psi_k(x)=\sum_{r=1}^{r=n}\rho_{k,2}(r)$$

143) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\lambda(x)P_{k,2\tau}(x)=\sum_{r=1}^{r=[\sqrt{n}]}P_{2k,\tau}(r)$$

144) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]f_{\beta-1}(x)=\sum_{r=1}^{r=n}f_{\beta}(x)=F_{\beta}(n)$$

145) $$\sum_{r=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\frac{\lambda(x)f_{\beta-1}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-2}(x))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(x)}}=\sum_{r=1}^{r=n}\lambda(r)f_{\beta}(r)$$

146) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\lambda(x)\psi(x^2)=\sum_{r=1}^{r=n}\lambda(r)\psi(r)$$

147) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\lambda(x)\psi^2(x)=\sum_{r=1}^{r=n}\lambda(r)f_3(r)$$

148) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\frac{f_{\beta-1}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-2}(x))}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}(x)}}=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{f_{\beta}(r)\psi(r^2\pi^{\beta-2}(r))}{\beta^{\tilde{\omega}(r)}}$$

149) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\psi(x^2)=\sum_{r=1}^{r=n}\psi^2(r)$$

150) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\psi^2(x)=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{f_3(r)\psi(r^2\pi^2(r))}{3^{\tilde{\omega}(r)}}$$

151) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\mu(x)=1$$

152) $$\sum_{x=1}^{x=n} F_\beta\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\mu(x)=F_\beta(n)$$

153) $$\sum_{x=1}^{x=n} F_{\beta-\gamma+1}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)f_\gamma(x) = F_{\beta+1}(n)$$

154) $$\sum_{x=1}^{x=n} F_{\beta+1}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\psi(x) = F_{\beta+3}(n)$$

155) $$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] F_\beta(x) = F_{\beta+1}(x).$$

Es soll nun die Summe:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]+\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]$$

näher untersucht werden.

Es sei:

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{b(p+1)^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]=A$$

$$\left[\sqrt[\tau]{\frac{bn^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]=B.$$

Ist nun:

$$\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho \leqq y < \sqrt[\tau]{\frac{b(x+1)^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho$$

so hat man auch:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(y^\tau+\rho)-\beta}{b}}-1 < x \leqq \sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(y^\tau+\rho)-\beta}{b}}$$

und daher:

$$x=\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(y^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right].$$

Man sieht demnach, dass in der oben angegebenen zweiten Summe:

$$\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(y^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]-\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha((y-1)^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right] \quad (A < y-1 < B)$$

Glieder den Werth $y-1$ haben; den Werth A besitzen:

$$\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha((A+1)^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]-p$$

Glieder, während:

$$n-\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(B^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]$$

Glieder gleich B sind:

Es ist demnach:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]=A\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha((A+1)^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]-p\right\}+$$

$$+(A+1)\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha((A+2)^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]-\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha((A+1)^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]\right\}+$$

$$+(A+2)\left\{\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha((A+3)^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]-\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha((A+2)^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]\right\}+$$

$$+$$

$$+B\left\{n-\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(B^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]\right\}$$

oder auch:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]=-\sum_{x=A+1}^{x=B}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(x^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]+Bn-Ap.$$

Es ist also:

$$156)\qquad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma+\beta}{\alpha}}-\rho\right]-$$

$$-\sum_{x=A+1}^{x=B}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(x^\tau+\rho)-\beta}{b}}\right]+Bn-Ap.$$

Nimmt man speciell:

$$p = 0$$

und wählt α, β, b, ρ so, dass auch:

$$A = 0$$

ist, so hat man:

$$157)\quad \sum_{x=1}^{x=n} \left[\sqrt[\tau]{\frac{bx^\sigma + \beta}{\alpha}} - \rho \right] + \sum_{x=1}^{x=B} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha(x^\tau + \rho) - \beta}{b}} \right] = Bn.$$

Specielle Fälle dieser Relationen haben Gauss, Dirichlet, Zeller, Berger und Cesaro mitgetheilt.

Diese Formeln könnten auch leicht mit Benützung der zahlentheoretischen Function $\varepsilon(\alpha)$ abgeleitet werden, deren man sich auch, wie ich bei dieser Gelegenheit zeigen will, mit Vortheil zum Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes bedienen kann.

Die verallgemeinerte Gaussische charakteristische Zahl für den Rest n und den zu n relativ primen Modul m ist bekanntlich gleich der Anzahl der negativen absolut kleinsten Bruchreste, welche bei der Division der Zahlen:

$$1.n,\ 2.n,\ \ldots,\ \frac{m-1}{2}n$$

durch m auftreten. Da nun für ein beliebiges x der absolut kleinste Bruchrest negativ ist, wenn zwischen x und $x+\frac{1}{2}$ eine ganze Zahl liegt, so wird der bei der Division von kn durch m auftretende absolut kleinste Rest negativ sein, wenn:

$$\frac{kn}{m} < g < \frac{kn}{m} + \frac{1}{2}$$

also:

$$gm - \frac{m-1}{2} \leqq kn < gm$$

ist, wo g eine ganze Zahl vorstellt. Es ist also, wie schon Zeller hervorgehoben hat, die verallgemeinerte Gaussische charakteristische Zahl von n in Bezug auf m:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx}{n}\right]-\sum_{x=1}^{=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx-\frac{1}{2}(m-1)}{n}\right].$$

Die verallgemeinerte Gaussische charakteristische Zahl von m in Bezug auf n ist selbstverständlich:

$$\sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny}{m}\right]-\sum_{y-1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny-\frac{1}{2}(n-1)}{m}\right]$$

Um das quadratische Reciprocitätsgesetz zu beweisen, hat man nur zu zeigen, dass die Summe der beiden charakteristischen Zahlen nach dem Modul 2 congruent $\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$ ist.

Nun ist:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx}{n}\right]+\sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny}{m}\right]=\sum_{x=1,\,y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\,y=\frac{m-1}{2}}\left\{\varepsilon\left(\frac{mx}{ny}\right)+\varepsilon\left(\frac{ny}{mx}\right)\right\}$$

Da nun für jedes Werthepaar x, y einer der beiden Brüche:

$$\frac{mx}{ny},\ \frac{ny}{mx}$$

grösser, der andere aber kleiner als 1 ist, so hat der Ausdruck unter dem Summenzeichen auf der rechten Seite dieser Gleichung für jedes Werthepaar x, y den Werth 1, so dass also die Summe gleich der Anzahl der Werthepaare ist. Man hat daher die Gleichung:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx}{n}\right]+\sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny}{m}\right]=\frac{m-1}{2}\ \frac{n-1}{2}.$$

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx-\frac{1}{2}(m-1)}{n}\right]=\sum_{x=1,\,y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\,y=\frac{m-1}{2}}\varepsilon\left(\frac{mx-\frac{1}{2}(m-1)}{ny}\right)$$

$$\sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{ny-\frac{1}{2}(n-1)}{m}\right] = \sum_{x=1,\ y=1}^{x=\frac{n-1}{2},\ y=\frac{m-1}{2}} \varepsilon\left(\frac{ny-\frac{1}{2}(n-1)}{mx}\right).$$

Es ist nun jedesmal, wenn:

$$mx - \frac{m-1}{2} > ny$$

ist, auch:

$$n\left\{\frac{m+1}{2} - y\right\} - \frac{n-1}{2} > m\left\{\frac{n+1}{2} - x\right\}$$

so dass also die Summen auf den rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen denselben Werth haben.

Man hat daher:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx}{n}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx-\frac{1}{2}(m-1)}{n}\right] + \sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny}{m}\right] - \sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny-\frac{1}{2}(n-1)}{m}\right] =$$

$$= \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} - 2\sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny-\frac{1}{2}(n-1)}{m}\right]$$

oder:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx}{n}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}}\left[\frac{mx-\frac{1}{2}(m-1)}{n}\right] + \sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny}{m}\right] - \sum_{y=1}^{y=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{ny-\frac{1}{2}(n-1)}{m}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} \pmod{2}.$$

Man hat ferner:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right] = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right] + \sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}}-\rho\right].$$

Es sei:

$$\left[\sqrt{\frac{\alpha}{b(p+1)^\sigma+\beta}-\rho}\right]=A$$

$$\left[\sqrt{\frac{\alpha}{bn^\sigma+\beta}-\rho}\right]=B$$

alsdann ist:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]=\sum_{x=p+1,\;y=1}^{x=n,\;y=A}\varepsilon\left(\sqrt{\frac{\alpha}{(bx^\sigma+\beta)y^\tau}-\frac{\rho}{y^\tau}}\right)$$

Nun ist aber jedesmal, wenn:

$$\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{(bx^\sigma+\beta)y^\tau}-\frac{\rho}{y^\tau}}\geqq 1$$

ist, auch:

$$\frac{\alpha}{bx^\sigma(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{bx^\sigma}\geqq 1$$

und daher hat man:

$$\sum_{x=p+1,\;y=1}^{x=n,\;y=A}\varepsilon\left(\sqrt{\frac{\alpha}{(bx^\sigma+\beta)y^\tau}-\frac{\rho}{y^\tau}}\right)=\sum_{x=p+1,\;y=1}^{x=n,\;y=A}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{bx^\sigma(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{bx^\sigma}}\right)$$

Lässt man auf der rechten Seite dieser Gleichung x alle Werthe von 1 bis n durchlaufen, so hat man für jeden Werth von y p Einheiten zu der ursprünglichen Summe hinzufügt und legt man alsdann dem y nur die Werthe $B+1,\ldots,A$ bei, so hat man für jeden der n Werthe des x B Einheiten von der neuen Summe subtrahirt; man hat daher die Relation:

$$\sum_{x=p+1,\;y=1}^{x=n,\;y=A}\varepsilon\left(\sqrt{\frac{\alpha}{(bx^\sigma+\beta)y^\tau}-\frac{\rho}{y^\tau}}\right)=\sum_{x=1,\;y=B+1}^{x=n,\;y=A}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{bx^\sigma(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{bx^\sigma}}\right)-$$
$$-Ap+Bn$$

oder:

$$158)\quad\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]=\sum_{y=B+1}^{y=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]+Bn-Ap$$

Es ist also:

$$159)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]+$$
$$+\sum_{y=B+1}^{y=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]+Bn-Ap.$$

Sind die in dieser Relation auftretenden Grössen so gewählt, dass:

$$B=0$$

ist, so hat man:

$$160)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\sqrt[\tau]{\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}-\rho}\right]+$$
$$+\sum_{y=1}^{y=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{b\,(y^\tau+\rho)}-\frac{\beta}{b}}\right]-Ap.$$

Specielle Fälle dieser Relation haben Dirichlet, Zeller, Berger, Cesaro und Lipschitz mitgetheilt.

Setzt man:

$$\tau=1$$
$$\rho=0$$

und wählt die Zahlen α, b, β, n, welche sämmtlich ganz sein sollen, so dass:

$$\alpha < bn^\sigma+\beta$$

und gleichzeitig:

$$\alpha > b(n-1)^\sigma+\beta$$

ist, so hat man:

$$161)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}\right]=\sum_{x=1,\ y=1}^{x=n,\ y=C}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{(bx^\sigma+\beta)y}\right)$$
$$=\sum_{r=1}^{r=\alpha}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{r}\right)\chi_r(d_1)$$

wo:

$$C=\left[\frac{\alpha}{b+\beta}\right]$$

und $\chi_r(d_1)$ die Anzahl jener Divisoren d_1 von r ist, welche die Form $bx^\sigma+\beta$ haben. Setzt man nun:

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha}\chi_r(d_1)=X(\alpha)$$

so hat man die Relation:

$$161)\qquad X(\alpha)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{bx^\sigma+\beta}\right]+\sum_{y=1}^{y=A}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha}{by}-\frac{\beta}{b}}\right]-Ap.$$

Setzt man:

$$\beta=0,\ b=1,\ \sigma=1,\ \alpha=n$$

und schreibt in der obigen Formel für $n:n+1$, so erhält man sofort die von H. Hermite im 2. Bande der Acta mathematica mitgetheilte Formel:

$$162)\qquad \sum_{r=1}^{r=n}\psi(r)=2\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right]-([\sqrt{n}])^2$$

Auch die von H. Lipschitz a. a. O. mitgetheilte Verallgemeinerung der Hermite'schen Formel:

$$163)\qquad \sum_{r=1}^{r=n}P_{0,\sigma}(r)=\sum_{x=1}^{x=\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}\left[\frac{n}{x^\sigma}\right]+\sum_{x=1}^{x=\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]}\left[\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x}}\right]-\left(\left[n^{\frac{1}{1+\sigma}}\right]\right)^2$$

ist ein specieller Fall der Gleichung 161).

Man leitet ferner aus der Gleichung 161) die Beziehungen ab:

$$164)\qquad \sum_{r=1}^{r=n}k(r)=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{2n}{2x+1}\right]+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}-\frac{1}{2}\right]-([n])^2$$

wenn:

$$\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}-\frac{1}{2}\right] > [\sqrt{n}]-1$$

ist, und:

$$165)\quad \sum_{r=1}^{r=n} k(r) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{2n}{2x+1}\right] + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}-\frac{1}{2}\right] - (([n])^2-1)$$

wenn:

$$\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}-\frac{1}{2}\right] = [\sqrt{n}]-1$$

ist, wo $k(r)$ die Anzahl der ungeraden Divisoren von r ist.